16.05.16

Άσκηση 5 / σελ. 433: Ας είναι f και g πραγματικές συναρτήσεις, συνεχείς με κοινό πεδίο ορισμού ένα μ.χ. E. Να αποδειχθεί ότι τα σύνολα

$$\{x \in E : f(x) = 0\} = A$$
$$\{x \in E : f(x) = g(x)\} = B$$
$$\{x \in E : f(x) \leq g(x)\} = \Gamma$$

→ τα ονομάζουμε για να διευκολυνθούμε

είναι κλειστά υποσύνολα του E.

Λύση

Θ.δ.ο. A κλειστό

Έστω $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \in A$ με $\lim x_\nu = x$. Θ.δ.ο. $x \in A$

$$\left.\begin{array}{l} (x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in A \Rightarrow f(x_\nu) = 0 \\ \lim x_\nu = x \xrightarrow{f \text{ συνεχής}} \lim f(x_\nu) = f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in A$$

Άρα το A κλειστό.

Θ.δ.ο. Β κλειστό.
Έστω $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in B$ με $\lim x_\nu = x$. Θ.δ.ο. $x \in B$

$$\left.\begin{array}{l} \lim x_\nu = x \xrightarrow[g \text{ συνεχής}]{f \text{ συνεχής}} \begin{cases} \lim f(x_\nu) = f(x) \\ \lim g(x_\nu) = g(x) \end{cases} \\ (x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in B \Rightarrow f(x_\nu) = g(x_\nu) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow x \in B$$

Άρα το Β κλειστό.

(Είχε άλλος τρόπος θα ήταν να θέσουμε $h(x) = f(x) - g(x)$ αποδεικνύοντας άμεσα ότι η συνεχής με ακολουθιακό κριτήριο)

Θ.δ.ο. Γ κλειστό
Έστω $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in \Gamma$ με $\lim x_\nu = x$. Θ.δ.ο. $x \in \Gamma$

$$\left.\begin{array}{l} (x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in \Gamma \Rightarrow f(x_\nu) \leq g(x_\nu) \\ \lim x_\nu = x \xrightarrow[g \text{ συνεχής}]{f \text{ συνεχής}} \begin{cases} \lim f(x_\nu) = f(x) \\ \lim g(x_\nu) = g(x) \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \leq g(x) \Rightarrow x \in \Gamma$$

Άρα το Γ κλειστό.

Αν είχαμε $\{x \in E : f(x) < g(x)\}$ παίρνοντας το όριο πάλι θα προέκυπτε μικρότερο ίσο.

Β' ΤΡΟΠΟΣ: $x \in A$, $f(x) \in \{0\}$

$$\left.\begin{array}{l} x \in f^{-1}(\{0\}), \quad A = f^{-1}(\{0\}) \\ \{0\} \text{ κλειστό (ως μονοσύνολο)} \\ f \text{ συνεχής} \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ κλειστό}$$

Για το Β: $h(x) = f(x) - g(x) = 0$ κι έτσι κάναμε αναγωγή στο Α. Μπορούμε να γράψουμε $h^{-1}(\{0\})$

Για το Γ: $\underbrace{f(x)-g(x)}_{h(x)} \leq 0$

άρα θα μπορούσαμε να γράψαμε $\Gamma = h^{-1}((-\infty,0])$

(και στα τρία, αντίστροφη εικόνα κλειστού μέσω συνεχής συνάρτησης)

Άσκηση 16/ σελ. 448: Ας είναι E_1, E_2 μ.χ. και $f: E_1 \to E_2$ μια συνάρτηση. Ν' αποδειχθεί ότι αν ισχύει

$$f(A') \subseteq (f(A))' \text{ για κάθε } A \subseteq E_1,$$

τότε η f είναι συνεχής. Ισχύει το αντίστροφο;

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $\bar{A} = A \cup A'$.

Επίσης, γνωρίζουμε: f συνεχής $\Leftrightarrow f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, $\forall A \subseteq E_1$

(άρα για ν' αποδείξουμε ότι είναι συνεχής θ' αποδείξουμε αυτή τη σχέση.)

Ισχύει: $f(\bar{A}) = f(A \cup A') \overset{\text{από μαθηματική ανάλυση}}{=} f(A) \cup f(A')$, (1)

$\overline{f(A)} = f(A) \cup (f(A))'$, (2)

Από υπόθεση, $f(A') \subseteq (f(A))' \Rightarrow f(A) \cup f(A') \subseteq f(A) \cup (f(A))'$

$\xrightarrow[(2)]{(1)} f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

Άρα f συνεχής.

Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$
$f(x) = 0$

Η f είναι συνεχής.

Παίρνουμε ως A, $A = \mathbb{R}$.

$f(\mathbb{R}') = f(\mathbb{R}) = \{0\}$

$\left(f(\mathbb{R})\right)' = \{0\}' = \emptyset$

Άρα, απ' τα παραπάνω έχουμε ότι: $f(\mathbb{R}') = \{0\} \supset \emptyset = \left(f(\mathbb{R})\right)'$

Άσκηση 18 / σελ. 443: Ας είναι E_1, E_2 μ.χ. και $f: E_1 \to E_2$ μια συνάρτηση. Ν' αποδειχθεί ότι αν η f είναι συνεχής, τότε
$$\partial\left(f^{-1}(A)\right) \subseteq f^{-1}(\partial A) \quad \text{για κάθε } A \subseteq E_2$$

Λύση

$\partial A = \bar{A} - A^{\circ}$, $(*)$

Γνωρίζουμε ότι: f συνεχής $\Rightarrow$
$$\overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(\bar{A}), \quad (1)$$
$$f^{-1}(A^{\circ}) \subseteq \left(f^{-1}(A)\right)^{\circ}, \quad (2)$$

Στην $(*)$ όπου A βάζουμε $f^{-1}(A)$.

Έχουμε: $\partial\left(f^{-1}(A)\right) = \overline{f^{-1}(A)} - \left(f^{-1}(A)\right)^{\circ}$
$$= \overline{f^{-1}(A)} \cap \left(\left(f^{-1}(A)\right)^{\circ}\right)^{c}, \quad (3)$$

$$(3) \xrightarrow[(2)]{(1)} \partial\left(f^{-1}(A)\right) \subseteq f^{-1}(\bar{A}) \cap \left(f^{-1}(A^{\circ})\right)^{c}$$

σ' αυτή πήραμε τα συμπληρώματα

$$= f^{-1}(\bar{A}) - f^{-1}(A^{\circ})$$
$$= f^{-1}(\bar{A} - A^{\circ})$$
από μαθ ανάλυση
$$= f^{-1}(\partial A)$$

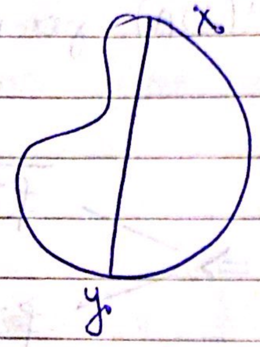
Άρα αποδείξαμε τελικά ότι: $\partial\left(f^{-1}(A)\right) \subseteq f^{-1}(\partial A)$

→ η τελευταία από την προηγούμενη φορά

Άσκηση: $\forall (x_n \xrightarrow{\rho_1} x)$
$\forall (y_n \xrightarrow{\rho_1} y)$ $\Big\} \Leftrightarrow (x_n, y_n) \xrightarrow{E_1 \times E_1} (x,y)$, $\rho : E_1 \times E_1 \to \mathbb{R}$
$\Rightarrow \rho(x_n, y_n) \to \rho(x,y)$

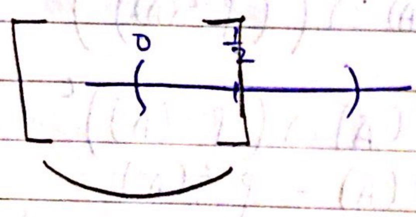
Αυτό συμβαίνει διότι ισχύει:
$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x,y)| \leq \underbrace{\rho(x_n, x)}_{\downarrow 0} + \underbrace{\rho(y_n, y)}_{\downarrow 0}$$

Επίσης είχαμε πει: A συμπαγές $\subseteq (E, \rho)$
τότε: $\exists x_0, y_0 \in A : \delta(A) = \rho(x_0, y_0)$



Αυτό δεν ισχύει γενικά σε μη συμπαγείς μ.χ.

Αντιπαράδειγμα: $((0,1), 1 \cdot 1)$



$\left(0, \frac{1}{2}\right]$ κλειστό σαν μ.χ.

Παρόλα αυτά η διάμετρός του δεν πιάνεται γιατί λείπει η συμπάγεια.

Το σύνολο αυτό δεν είναι συμπαγές, διότι:
το 0 είναι σ.σ. που δεν ανήκει στο χώρο
ή
για $x_n \to 0$ θα έπρεπε κάθε υπακολουθία να έχει όριο που να ζει μέσα στο χώρο (ακολουθιακά συμπαγές)

Άσκηση: $f:(E_1,\rho_1) \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} (E_2,\rho_2)$ συνεχής, (E_1,ρ_1) συμπαγής $\Rightarrow \exists f^{-1}: E_2 \to E_1$ συνεχής

Λύση

Παίρνουμε ένα $K \subseteq E_1$ κλειστό (στον E_1)

$(f^{-1})^{-1}(K) \overset{1-1}{\underset{\text{επί}}{=}} f(K)$

Αρκεί νδο $f(K)$ κλειστό.

Το K είναι κλειστό υποσύνολο συμπαγούς $\Rightarrow K$ συμπαγές, f συνεχής $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(K)$ συμπαγές

$\Rightarrow f(K)$ κλειστό

Άσκηση: $A, B \subseteq (E,\rho)$

A, B συμπαγή

Ν.δ.ο. $\exists a \in A, \exists b \in B: \rho(A,B) = \rho(a,b)$

Λύση

B συμπαγές $\Rightarrow \exists b \in B: \rho(A,B) = \rho(A,b)$ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ!

Εφόσον A συμπαγές $\Rightarrow \exists a \in A: \rho(A,B) = \rho(a,b)$

Άσκηση: $A \subseteq (E,\rho)$ $\boxed{\text{συμπαγές}}$. Ν.δ.ο. $\bar{A}$, A' συμπαγή

θήκη, σ.σ.

Λύση

A κλειστό $\Rightarrow A = \bar{A}$

Επιπλέον, $\bar{A} = A \cup A'$, άρα $A' \subseteq \bar{A}$. Θ.δ.ο. A' συμπαγές και μάλιστα ακολουθιακά συμπαγές.

Πρέπει νδο πρέπει να πάρω μια ακολουθία που να συγκλίνει μέσα στο A', δηλ. σε ένα σ.σ.

Έστω $(x_n)_n \subseteq A'$. Θδο $\exists x \in A': x_n \to x$

$x_1 \in A' \Rightarrow \exists y_1 \in A : y_1 \neq x_1 : \rho(x_1, y_1) < 1$

$x_2 \in A' \Rightarrow \exists y_2 \in A : \quad \rho(x_2, y_2) < \frac{1}{2}$

$\vdots$

$x_n \in A' \Rightarrow \exists y_n \in A : \ldots \quad \rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$

$\downarrow$

Πρέπει όμως να συμβαίνει! — πλησιάζουμε όσο πιο κοντά μπορούμε

Επιλέγουμε: $y_2 \neq x_2$, ...

$\vdots$ ↕ τον ατόμο που θα το δούμε στην πορεία

$y_n \neq x_n$, ...

Έχουμε λοιπόν: x_n, y_n, $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} y_n \in A, \ \forall n \\ \exists y_{k_n} \to y \in A \end{array}\right\} \Rightarrow \rho(y_{k_n}, y) \to 0$$

$$\Rightarrow \rho(x_{k_n}, y_{k_n}) < \frac{1}{k_n}$$

$$\Rightarrow \rho(x_{k_n}, y) \leq \underbrace{\rho(x_{k_n}, y_{k_n})}_{\downarrow 0} + \underbrace{\rho(y_{k_n}, y)}_{\downarrow 0}$$

άρα $\rho(x_{k_n}, y) \to 0$

Δηλ. για $(x_n)_n \subset A' \Rightarrow \exists x_{k_n} \to y \in A$

Εμείς όμως θέλαμε $y \in A'$!

Ξέραμε ότι: $x_{k_n} \to y$

$y_{k_n} \to y$ (η οποία έχει επιλεγεί με δικό συγκεκριμένο τρόπο)

Πώς να επιλέξουμε y_{k_n} ώστε y σ.σ.;

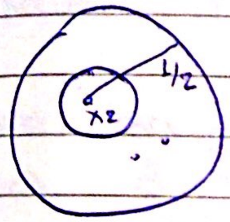
Θα πρέπει το y_{k_n} που ψάχναμε να είναι διαφορετικά από δίο, αφού σε κάθε μπάλα θα βρίσκω άπειρα.

Άρα τελικά επιλέγουμε:

$y_2 \neq x_2$, $y_2 \neq y_1$

$\vdots$

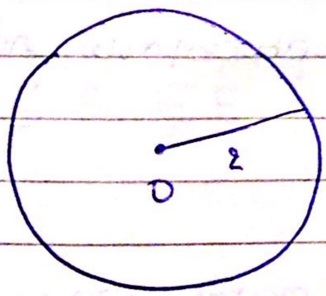
$y_n \neq x_n$, $y_n \neq y_m$, $y_{n-1} \Rightarrow y_n \neq y_m \ \forall n \neq m$



$A = [0,1] \cup \{2\} \cup \{3\} \Rightarrow A = \bar{A}$ διότι το 3 είναι μεμονωμένο σημείο αλλά $\in A$

κλειστό κλειστό κλειστό

Άσκηση:
$\mathbb{R}^2$



$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

Θα μελετήσουμε τι είναι το A.

Το A είναι κλειστό (πάρε ακολουθίες...)

Είναι φραγμένο γιατί $\delta(A) = 4$ για τα πιο απομακρυσμένα x, y.

Στο $\mathbb{R}^2$, φραγμένο $\Rightarrow$ ολικά φραγμένο

Αφού κλειστό και φραγμένο $\Rightarrow$ A συμπαγές
(Είναι η περίπτωση που ισχύει το αντίστροφο που λέγαμε)

Όμως, στον $(\mathbb{R}, \rho_\delta)$ βρείτε κλειστή μπάλα που να μην είναι συμπαγές

Κλειστή μπάλα, δηλ. $B(x_0, r) = \{y \in \mathbb{R} : \rho_\delta(y, x_0) \leq r\}$

για $r = \frac{1}{2}$: $B(x_0, r) = \{x_0\}$ είναι συμπαγές

για $r = 1$: $B(x_0, r) = (\mathbb{R}, \rho_\delta)$

Είναι φραγμένο;

Ναι γιατί η διακριτή είναι εκ των πραγμάτων φραγμένο, με $\delta(\mathbb{R}) = 1$.

Είναι όμως συμπαγές;

$(\mathbb{R}, \rho_\delta)$ Πάμε να πάρουμε ένα ανοιχτό κάλυμμα και να βρούμε ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα.

$$\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} B\left(x, \frac{1}{2}\right)$$

ανοιχτό $\Longleftarrow$ ανοιχτό

Αν ήταν συμπαγές, θα γραφόταν: $\mathbb{R} = \bigcup_{i}^{N} \{x_i\}$ το οποίο όμως δεν είναι πεπερασμένο.
Άρα δεν είναι συμπαγές.

Άσκηση: (E,ρ) μ.χ. ώστε κάθε κλειστή μπάλα να είναι συμπαγής $\Rightarrow (E,\rho)$ πλήρης
φραγμένο και κλειστό

Λύση
Έστω $(x_n)_n$ βασική $\subseteq (E,\rho)$.
Θ.δ.ο $x_n \xrightarrow{\rho} x$, για κάποιο $x \in E$ δηλ. θδο $(x_n)_n$ συγκλίνουσα

Πρέπει να συμπεριλάβω την $(x_n)_n$ μέσα σε μια κλειστή μπάλα για να αποδείξω το ζητούμενο

Έχουμε πει ότι κάθε βασική ακολουθία είναι φραγμένο σύνολο
$(x_n)_n$ βασική $\Rightarrow \delta(A) < +\infty$
$\Downarrow$

$A \subseteq B(x,r) \leftarrow$ είναι σωστό? ΝΑΙ
άρα ισχύει και $A \subseteq B(x,r) \subseteq B_{κλ}(x,r)$

Έχουμε: $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq B_{κλ}(x,r)$ συμπαγές

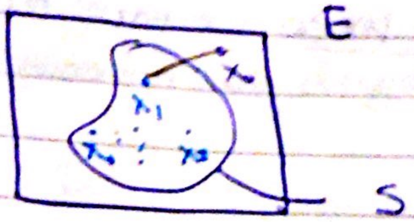
Άρα έχουμε μια ακολουθία μέσα σ'ένα συμπαγές
Δηλ. $\exists\, x_{k_n} \to x \in B_{κλ}(x,r)$ συμπαγές
και αφού $(x_n)_n$ βασική
$\Rightarrow x_n \to x$

SOS ΘΕΩΡΗΜΑ!

Άρα, (E,ρ) πλήρης.

πιο δύσκολη από τις προηγούμενες
Άσκηση: (E,ρ) συμπαγής μ.χ.
Ν.δ.ο $\nexists\, S \subsetneq E$, $S \cong E$ ισομετρικό $\iff \exists\, \phi : (E,\rho) \to (S,\rho)$ 1-1, επί με $\rho(\phi(x),\phi(y)) = \rho(x,y)$ $\forall x,y \in E$

Λύση
Έστω ότι υπάρχει τέτοιο S.
$\exists\, S \subsetneq E$, $S \neq \emptyset$, $\phi : E \to S$ ισομετρία (1-1, επί)



Παίρνουμε ένα $x_0 \notin S$.

Φτιάχνουμε την ακολουθία:

$$\begin{array}{c} x_0 \notin S \\ \hline S \ni x_1 = \phi(x_0) \\ S \ni x_2 = \phi(x_1) \\ \vdots \\ S \ni x_n = \phi(x_n) \end{array}$$

η ακολουθία ξεκινάει από δω και κάτω

Η φ ως ισομετρία είναι Lipschitz, άρα συνεχής.

$$\left.\begin{array}{l} S = \phi(E) \\ \phi \text{ συνεχής} \\ (E,\rho) \text{ συμπαγής} \end{array}\right\} \Rightarrow S : \text{συμπαγής} \subseteq E$$

Παίρνουμε: $\underset{\in S}{\rho(x_0, x_1)} \geq \rho(x_0, S) > 0$

γιατί είναι θετική

διότι (αν $\rho(x_0,S)=0 \Rightarrow x_0 \in \bar{S} = S$, αφού S κλειστό, το οποίο όμως δεν ισχύει αφού $x_0 \notin S$)

Ονομάζουμε: $\rho(x_0,S)=\delta$

Έχουμε: $\rho(x_0,x_2) \geq \delta > 0$

$\rho(x_0,x_n) \geq \delta > 0 \quad \forall n=1,2,\ldots$

Είναι: $\rho(x_1, x_{n+1}) = \rho(\phi(x_0), \phi(x_n)) = \rho(x_0, x_n) \geq \delta$

Άρα έχουμε αποδείξει ότι: $\rho(x_0, x_1) \geq \delta$

$\rho(x_1, x_{n+1}) \geq \delta$

$\vdots$

$\rho(x_k, x_{n+k}) \geq \delta \quad \forall n \neq k$

$\Rightarrow (x_n)_n$ όχι βασική (*)

Όμως η $(x_n)_n$ ζει μέσα στο E, δηλ. $\exists\, x_{k_n} \to x$ (λόγω συμπάγειας)

$\Rightarrow x_{k_n}$ βασική (άρα κάποιοι όροι της θα πλησιάζουν) (1)

(*) $\Rightarrow (x_n)_n$ δεν έχει βασική υπακολουθία (2)

Από (1) και (2) έχουμε άτοπο.

Άσκηση: $\phi : (E,\rho) \to (E,\rho)$ συμπαγής

$\rho(\phi(x), \phi(y)) < c\rho(x,y) \quad \forall x,y \in E$

$\Rightarrow$ Νδο $\exists!$ σταθερό σημείο

Λύση

Θδο $\exists x_0 : \phi(x_0) = x_0$ (1) τότε θα ήταν συστολή, τώρα δεν είναι (επίσης τότε, είχαμε σαν υπόθεση την πληρότητα)

ύπαρξη

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει η (1).

$\forall x \in E : \phi(x) \neq x$

$g(x) = \rho(\phi(x), x)$, $\phi(x) \in E$, $x \in E$

η ϕ συνεχής ως Lipschitz

$g : (E,\rho) \to \mathbb{R}^+$ είναι συνεχής διότι: για $x_n \to x$, τότε $\phi(x_n) \to \phi(x)$

$x \in E$

$\Rightarrow \rho(\phi(x_n), x_n) \to \rho(\phi(x), x)$

$\quad\quad\quad = g(x_n) \quad\quad\quad = g(x)$

θα είναι το σταθερό σημείο που θέλω

$\exists x_0 : g(x_0) = \min\{ g(x) : x \in E \}$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: $\phi(x_0) = x_0$

Scanned by CamScanner

Ορίζουμε $\phi(x_0) = y_0$ (Θ.δ.ο. $y_0 = x_0$)

Είναι: $\rho(x_0, y_0) > \rho(\phi(x_0), \phi(y_0))$

$$\begin{array}{ccc} \rho(x_0,y_0) & > & \rho(\phi(x_0),\phi(y_0)) \\ \| & & \| \\ \rho(x_0, \phi(x_0)) & & \rho(y_0, \phi(y_0)) \\ \| & & \| \\ \min g = g(x_0) & > & g(y_0) \end{array}$$

$g(x_0) \geq 0$

δηλ. αν $y_0 \neq x_0$ τότε $g(x_0) > 0$ και θα είχαμε μια μικρότερη τιμή $g(y_0)$ κάτω από το min.

Ξ

Μοναδικότητα: Υποθέτουμε ότι $\exists$ δύο ...

Άσκηση: $A, B \neq \emptyset$, $A, B \subseteq (E, \rho)$

B συμπαγές, A τυχαίο

Τότε: $\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow \bar{A} \cap B \neq \emptyset$

Λύση

$(\Longrightarrow)$ $\rho(A, B) = 0$

$\exists b \in B: \rho(A, B) = \rho(A, b) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b \in \bar{A} \\ b \in B \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{A} \cap B \neq \emptyset$

$(\Longleftarrow)$ $\bar{A} \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \rho(A, B) = 0$

$\exists b \in \bar{A} \cap B$ άρα $\left.\begin{array}{l} \exists x_n \xrightarrow{\rho} b \\ (x_n)_n \subseteq A \end{array}\right\} \Rightarrow \rho(x_n, b) \to 0$

$\Downarrow$

$\rho(A, B) = 0$

Παρατήρηση: A κλειστό, B συμπαγές,
$A \cap B \neq \Phi \iff \rho(A,B)=0$

Ουσιαστικά βγάζουμε την κλειστότητα.

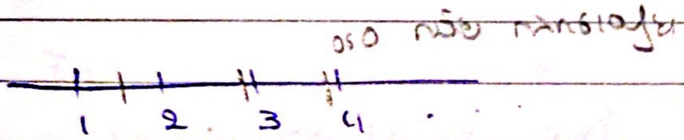
Θέλουμε τώρα ένα αντιπαράδειγμα:
Ψάχνουμε:
F_1, F_2 κλειστά $\subseteq \mathbb{R}$ (βγάζουμε την συμπάγεια)
$\rho(F_1,F_2)=0$.
$F_1 \cap F_2 = \Phi$

Δεν θέλω να είναι φραγμένα αφού η συμπάγεια δεν ισχύει

$F_1 = \{n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ κλειστό

Πώς γίνεται να βρω F_2 ώστε να είναι ξένα και η απόσταση 0,

Παίρνουμε $F_2 = \left\{ n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$



Θα είναι:
$\rho(F_1, F_2) = 0$